02/11/2018

Μάθημα 4ο

ΠΑΤ $\begin{cases} y' = f(t, y(t)) & , t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$

Τι έχουμε δει;

$\boxed{Θ1}$ Υπαρξη και μοναδικότητα λύσης του ΠΑΤ, σ' όλο το $[a,b]$
1) f: συνεχής
2) f ικανοποιεί Lipschitz ομοιομ. ως προς y.

$\boxed{Θ2}$ Υπαρξη και μοναδικότητα λύσης τοπικά
1) f: συνεχής
2) f Lipschitz για $y \in [y_0 - c, y_0 + c]$
Τότε μοναδικότητα στο $[a, b']$ όπου $b' = \min\left(b, a + \frac{c}{A}\right)$

$\boxed{Θ3 + Θ4}$ Ευστάθεια της λύσης $\| \varepsilon(t) \|_\infty \leq C \, |\varepsilon_0|$
ή $\| \varepsilon(t) \|_\infty \leq ' |\varepsilon_0|$.

Ασκήσεις

π.χ.

① Εστω $p: [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής
Ν.δ.ο. κάθε λύση της ομογενούς ΔΕ:
$y'(t) = p(t) \, y(t) \quad , t \in [a,b]$
είναι της μορφής $y(t) = c \cdot e^{\int_a^t p(s) ds}$, c: σταθερά

Λύση

1ο Βήμα: Αντικαθιστώ τη λύση y(t) στην ομογενή ΔΕ και θα πρέπει να την επαληθεύει.

$$y'(t) = p(t)\cdot y(t) \Rightarrow y' - py = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(C_1 \cdot e^{\int_a^t p(s)ds}\right)' - p(t)\cdot C_1 e^{\int_a^t p(s)ds} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C\cdot p(t)\, e^{\int_a^t p(s)ds} - C\, p(t)\, e^{\int_a^t p(s)ds} = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

Άρα ισχύει. Υπάρχει λύση και είναι η $y(t) = C\cdot e^{\int_a^t p(s)ds}$

Τώρα, θέλω να δείξω την μοναδικότητα.

<u>2ο Βήμα</u> : Μοναδικότητα.

Έστω ότι η $y(t) = C\cdot e^{\int_a^t p(s)ds}$ δεν είναι η μοναδική, δηλ. ότι υπάρχει και άλλη λύση της Δ.Ε, η:

$$y(t) = u(t)\cdot e^{\int_a^t p(s)ds}$$

Άρα, α.ν.δ.ο. $u(t) = C_1$

<u>Άρα:</u>
$$\begin{cases} u(t) = y(t)\cdot e^{-\int_a^t p(s)ds} \\ u'(t) = y'(t)\cdot e^{-\int_a^t p(s)ds} - y(t)\cdot e^{-\int_a^t p(s)ds}\cdot p(t) \Rightarrow \end{cases}$$

$$u'(t) = e^{-\int_a^t p(s)ds}\,(\underbrace{y'(t) - p(t)y(t)}_{=0})$$

0 από εκφώνηση.

<u>Άρα:</u> $u'(t) = 0 \Rightarrow u(t) = C_1$ C_1 σταθερά

Επομένως, η $y(t) = C_1\cdot e^{\int_a^t p(s)ds}$ είναι λύση και είναι μοναδική

(Μπορούμε να λύσουμε και την αντίστοιχη μη ομογενή) μη γραμμικός όρος → ΠΡΟΣΟΧΗ!

πχ

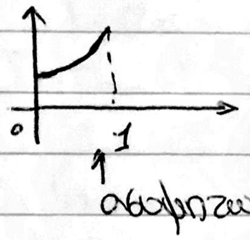
② Έστω Π.Α.Τ. : $\begin{cases} y' = y^2, & t\in[0,2] \\ y(0)=1 \end{cases}$

Ελέγξτε ότι το Θεώρημα τοπικής ύπαρξης και μοναδικότητας (Θ2) εξασφαλίζει ύπαρξη και μοναδ. του ΠΑΤ σ' ένα διάστημα της μορφής $[0,b']$.
Επειδή η f ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz ως προς y σε ένα διάστημα $[1-c, 1+c]$, μελετήστε το b' συναρτήσει του c, $c\in\mathbb{R}$, $c>0$

Λύση

Το Θ1 θεωρητικά μπορεί να εφαρμοστεί για όλες τις f γραμμικές.

Έχουμε δείξει ότι η λύση του ΠΑΤ είναι $y(t) = \frac{1}{1-t}$



$y(0)=1$ όταν $t\to1$ τότε $y\to+\infty$
Άρα στο 1 η λύση μου απειρίζεται. Για να το λύσουμε σπάμε το διάστημα και θέλουμε και άλλη αρχική συνθήκη. Όμως ξεφεύγουμε από την Υ/Μ.

$f(t,y(t)) = y^2$

$f_y = 2y$. όταν $y\to\pm\infty$, $|f_y|\to\pm\infty$
Άρα δεν είναι φραγμένη σε όλο το διάστημα $[0,2]$
Επομένως, δεν ισχύει Lipschitz για όλο το διάστημα $[0,2]$ και γι' αυτό δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Θ1 με την ολική.

Επομένως, για ποια επιλογή του c δίνει του Θ. τοπικής Υ κ' Μ το μέγιστο b';

$$b' = \min\left(b,\ a + \frac{c}{A}\right) = \min\left(2,\ \frac{c}{A}\right)$$

Ξέρω ότι δεν μπορώ ποτέ να φτάσω στο 2. (το δείξαμε, αποδείχθηκε στο 1 η λύση) (Άρα θα ισχύει: $\frac{c}{A} \leq 2$ ← λογικό συμπερ.)

$$A = \max_{t\in[0,2]} |f(t)| = \max_{t\in[0,2]} |y^2|$$

Το y παίρνει τιμές στο $[1-c, 1+c]$

Άρα: $A = \max|y^2| = (1+c)^2$.

Άρα: $b' = \min\left(2, \frac{c}{(1+c)^2}\right)$ με $\frac{c}{(1+c)^2} \leq 2 \iff$ (έστω ότι ισχύει)

$\iff \dots \iff 2c^2 + 3c + 2 \geq 0$ που ισχύει $\forall c$.

Άρα ισχύει η σχέση $\frac{c}{(1+c)^2} \leq 2$ $\forall c$

Και συμπεραίνουμε ότι πράγματι $\boxed{b' = \frac{c}{(1+c)^2}}$ (αφού είναι το min)

Άρα: μπορώ να αποφανθώ για Υ και Μ, σύμφωνα με το Θεώρημα, σε ένα διάστημα της μορφής:

$\left[0, \frac{c}{(1+c)^2}\right]$, $c>0$. Ποιο είναι το μέγιστο που μπορώ να πάρω;

Θεωρώ: $g(c) = \dfrac{c}{(1+c)^2}$.

Πότε έχω maximum για την $g(c_i)$; → Παραγωγίζω

$$g'(c) = \left(\frac{c}{(1+c)^2}\right)' = \frac{1-c}{(1+c)^3}, \quad c>0$$

$c>0 \Rightarrow 1+c>0$

Που μηδενίζεται ο αριθμητής → $1-c=0 \Leftrightarrow c=1$.

Άρα για $c=1$ έχω max.

Άρα $b' = \dfrac{1}{(1+1)^2} = \dfrac{1}{4}$

Επομένως για $b' = 1/4$ έχουμε το μέγιστο.

Το Θ.Τ.Υ και Μ είναι στο διάστημα $[0, 1/4]$

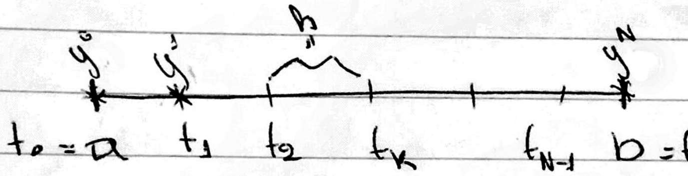
Κεφάλαιο 2ο : Η μέθοδος του Euler

Υποθέτω ότι έχω ένα Π.Α.Τ. της μορφής:

$$\text{Π.Α.Τ.} \begin{cases} y' = f(t, y(t)), & t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Θεωρούμε έναν ομοιόμορφο διαμερισμό του $[a,b]$

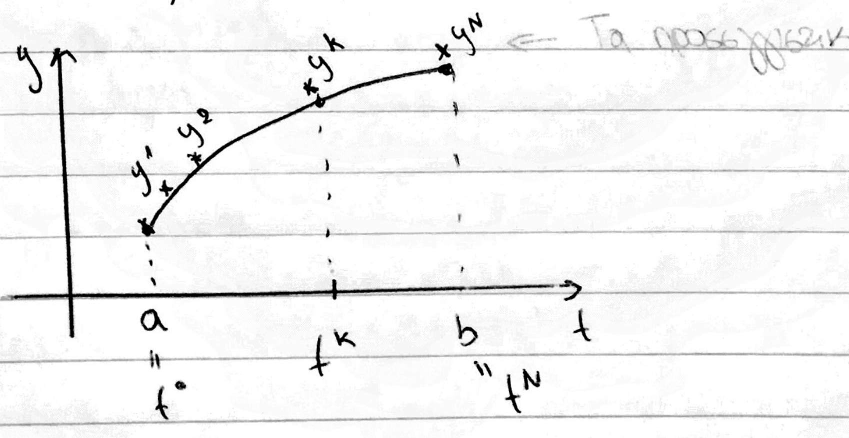
$$a = t^0 < t^1 < t^2 < \dots < t^k < \dots < t^N = b$$



χωρίζουμε σε N ίσα διαστήματα.

$$h = \frac{b-a}{N}, \quad N \in \mathbb{N}, \quad t^i = a + ih, \quad i = 0,1,2,\dots,N$$

Η μέθοδος του Euler θα μου δώσει αρχική συνθήκη για κάθε σημείο



$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + h\, f(t^n, y^n), & n = 0,1,\dots,N \\ y^0 = y_0 \end{cases}$$

Αναδρομική Σχέση.

Έτσι: $y^1 = y^0 + h f(t^0, y^0)$

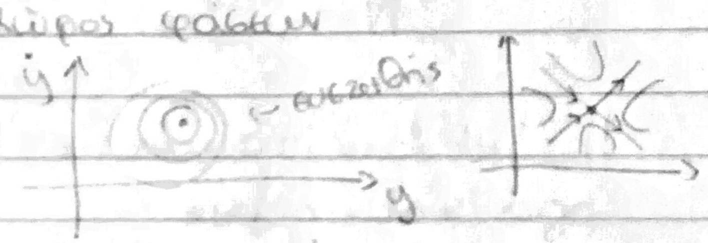
Χρησιμοποιώ πληροφορία του "τώρα" για να βρω τη πληροφορία του μέλλον.
Άρα η μέθοδος Euler μας λέει ότι αν γνωρίζω τι γίνεται στο παρόν, μπορώ να βρω τι γίνεται στο μέλλον (γνωρίζω y^0 → βρίσκω y^1, αρκεί να υπολογίσω $f(t^0, y^0)$)

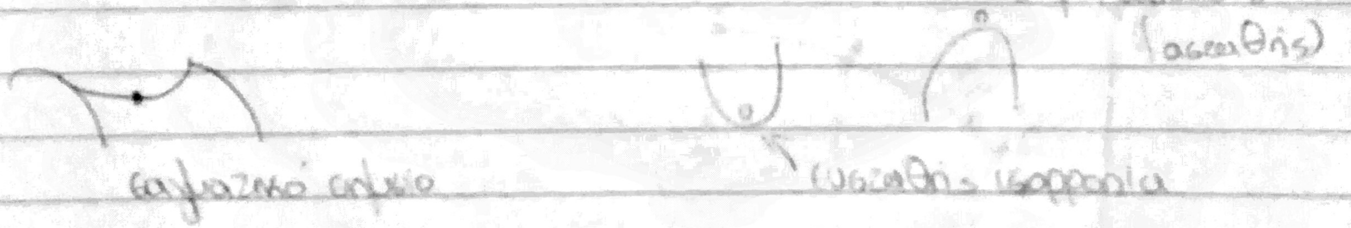
πόσο μέλλον όμως;

Παρένθεση

Σημεία ισορροπίας → εκεί που μηδενίζεται το σύστημα
πχ ομόκεντροι κύκλοι. → ευσταθείς τροχιές

$$\begin{cases} y' = x \\ x' + ky = 0 \\ y = A \\ x = 0 \end{cases}$$





Στον αρμονικό ταλαντωτή → 2 λύσεις
- ευσταθής η μία
- μη ευσταθής η άλλη

Σε αυτό το μάθημα αναλύουμε αριθμητικές μεθόδους

mathematica, matlab

Άρα 1ον: διακριτή μορφή παραγώγου με προσέγγιση εμπρόσθιων.
2ον: υπόθεση για την f.

Πως προκύπτει η μέθοδος Euler, δηλ. πως προκύπτει η έκφραση: $y^1 = y^0 + h f(t^0, y^0)$

(Θέλω να προσεγγίσω με ένα διακριτό ανάλογο το ΠΑΤ.)

Είναι:
$$y'(t) = f(t, y(t))$$
$$y'(t^n) \simeq \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h}$$
διακριτή μορφή παραγώγου. εμπρόσθιες πεπερασμένες διαφορές.

(Θέλω όσο το δυνατόν γίνεται μικρότερη διαμέριση (δηλ. μικρ. h))

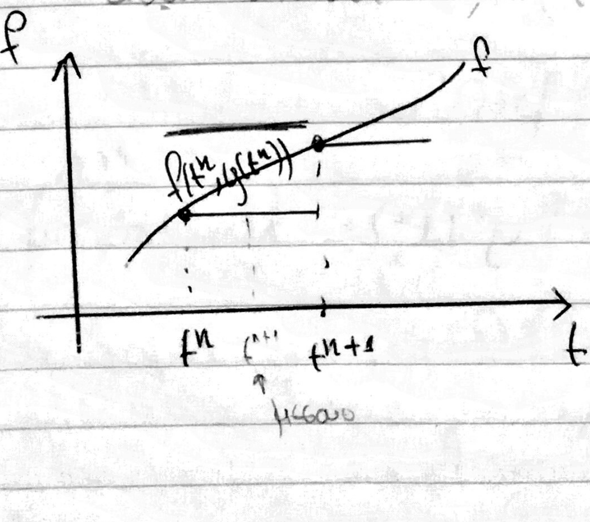
$$y'(t) = f(t, y(t)) \xrightarrow[\text{Ανάλογο}]{\text{Διακριτό}} \circledast \; \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h} \simeq f(t^n, y(t^n))$$

$$\Rightarrow \underbrace{y(t^{n+1})}_{= y^{n+1}} = \underbrace{y(t^n)}_{= y^n} + h f(t^n, y(t^n))$$

y^{n+1} → προσεγγιστική λύση.

Από το συνεχές πηγαίνω στο διακριτό (με την προσέγγιση)

$\circledast$ ξεκινάω από το t^n και πηγαίνω στο t^{n+1}
Η υπόθεση μου είναι ότι η f σε αυτό το διάστημα είναι σταθερή, παίρνει την τιμή που παίρνει στο σημείο t^n



Στην προσέγγιση $f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))$ δίνει
↓
είναι πεπλεγμένο
μπορώ να πάρω μεγαλύτερο βήμα
καλύτερη ευστάθεια